Differentiaalvormen

Dr. H. (Harm) van der Lek

26 april 2022

Versie 1

Inhoudsopgave

In §A.1 hebben we de stelling van Stokes geformuleerd:

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S \mathrm{d}\omega \tag{1}$$

In woorden was dat: De integraal over de rand van een gebied ∂S van 'iets' is gelijk aan de integraal over dat gebied S van de afgeleide van 'iets'. In dit document gaan we dieper in op wat die ω ('iets') en $\mathrm{d}\omega$ ('de afgeleide van iets') precies zijn.

1 De hoofdstelling.

We beginnen met het meest simpele voorbeeld, de hoofdstelling van de integraalrekening. Hierbij is de functie F een 'primitieve' van een functie f, dus $F'(x) = f(x)$.

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Iets uitgebreider en in overeenstemming met de praktijk van een berekening kunnen we dat zo schrijven:

$$\int\limits_a^b F'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{d}F = \big[F\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Nu is het goed om te bedenken dat in de 'normale' definitie van de integraal, de linkerkant van (2), je dit als één geheel moet zien. Het is een getal dat afhangt van de functie f en de getallen a en b en is gedefinieerd (bijvoorbeeld) als een limiet van ondersommen. De notatie zou dus ook (of misschien beter) ook kunnen zijn $I(f, a, b)$. In dit verband is het dus wat vreemd (om niet te zeggen 'fout') om $f(x)\mathrm{d}x = F'(x)\mathrm{d}x$ als een zelfstandig object te behandelen. Toch is dat precies wat we doen als we (2) als een voorbeeld van (1) zien:

$$\int_{\partial S} \omega = F(b) - F(a) \quad \text{en} \quad \int_S \mathrm{d}\omega = \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

Hier is ω een scalaire functie F. De rand $\partial S = \{a, b\}$ is hier 0-dimensionaal (twee losse punten) en de integraal is de som over deze twee punten waarbij we één punt kennelijk negatief moeten rekenen. Één van de voortekenen, dat het, nu nog vage, begrip *oriëntatie* hier een rol speelt. Wat is $\mathrm{d}\omega$ dan? Dat is de *differentiaal* van ω. Laten we die maar eens gewoon opschrijven:

$$dF = F'(x)\mathrm{d}x$$

Het is misschien nog illustratiever om dit naar twee dimensies te verheffen. Dus F is een scalaire functie van twee variabelen: $F(x, y)$.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{4}$$

Deze uitdrukking hebben we al eerder gezien. We hebben dat toen 'totale differentiaal' genoemd. De losse interpretatie van (4) is vrij duidelijk. Het geeft aan hoe een kleine verandering in x en y, $(x, y) \to (x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$, leidt tot een kleine verandering in F.

2 Exacte betekenis van de totale differentiaal.

Alhoewel (4) intuïtief vrij duidelijk lijkt, is het, wiskundig gezien, niet exact. Immers alleen $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'$ heeft een precieze definitie (limiet van $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ als $\Delta x \to 0$) en niet het losse gebruik van $\mathrm{d}f$ en/of $\mathrm{d}x$. Toch zult u ook in wiskundeboeken (4) kunnen aantreffen met een exacte betekenis. Deze is als volgt. De uitdrukkingen $\frac{\partial F}{\partial x}$ en $\frac{\partial F}{\partial y}$ zijn de twee componenten van de vector die we de *gradiënt* van F hebben genoemd. Maar dit was niet een gewone vector, maar een *covariante* vector, ook wel 1-*vorm* genoemd. Laten we even teruggaan naar de notatie die we daar eerder voor hadden ingevoerd, namelijk a_μ. Dat stelde tegelijkertijd een 1-vorm voor maar, afhankelijk van de context, ook één van de componenten in een gekozen coördinatensysteem. We hebben ook gezien dat de verzameling van alle covariante vectoren in een bepaald punt een n-dimensionale vectorruimte V^* vormt en dat dit de duale vectorruimte is die bij de vectorruimte van alle contravariante ('gewone') vectoren V. Laten we eens een basis kiezen voor V^*. Dat zijn dus n 1-vormen, zodanig dat we elke 1-vorm α kunnen schrijven als een lineaire combinatie van deze basisvectoren. De scalairen die voor deze basisvectoren moeten staan zijn $a_1, \ldots, a_n$. Dus we krijgen zoiets:

$$\alpha = a_1\square + a_2\square + \cdots + a_n\square$$

Alleen moeten we een notatie verzinnen voor de basis van covariante vectoren, die we hierboven dus op de plaatsen $\square$ kunnen invullen. Als we daar, heel saai, iets voor bedenken als ϕ^μ, dus we hebben n 1-vormen, $\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n$, dan wordt α dus geschreven als:

$$\alpha = a_1\phi^1 + a_2\phi^2 + \cdots + a_n\phi^n = a_\mu\phi^\mu$$

Laten we op dit moment echter een tipje van de sluier oplichten van wat er nog komen gaat. We gaan nog een operator d definiëren (een differentiaaloperator) die op vormen gaan werken. Dan zal blijken dat $\phi^\mu = \mathrm{d}x^\mu$. En dan krijgen we voor α dus:

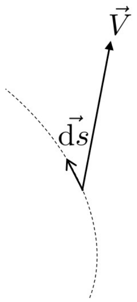
$$\alpha = a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + \cdots + a_n\mathrm{d}x^n = a_\mu\mathrm{d}x^\mu$$

Hiermee zal (4) dus tot een officieel correcte notatie verklaard zijn en representeert dus de gradiënt van F, voorheen ook wel genoteerd als ∇F.

3 Omringende ruimte 1 dimensie hoger.

Het simpelste geval van de stelling van Stokes is dus de hoofdstelling van de integraalrekening. Hierbij is de dimensie van de omringende ruimte R en van S gelijk aan 1 en van ∂S is de dimensie 0. We maken het een klein tikkeltje complexer door de dimensie van R gelijk aan 2 te maken. Die van

S en ∂S blijven 1 respectievelijk 0. Er is dus sprake van een kromme in het platte vlak met twee eindpunten.



Figuur 1: Flux langs kromme

In figuur 1 is een voorbeeld getekend. Stel nu dat α een 1-vorm is. Dit zou de gradiënt $\mathrm{d}\omega$, zoals boven kunnen zijn, maar dit hoeft niet. De uitdrukking $\int_S \alpha$ is nu niet zomaar een integraal als in de rechtervergelijking van (3). We zullen het nu moeten interpreteren als een lijnintegraal. We hebben dat in §?? geïntroduceerd in de volgende notatie gebruikt:

$$\text{Flux van } \vec{V} \text{ langs kromme } = \int_P^Q \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Toen gingen we uit van een vectorveld $\vec{V}$ en integreerden we het inproduct van $\vec{V}$ met een 'kleine' vector $\mathrm{d}s$ (een stapje) langs de kromme. Nu weten we dat we $\vec{V}$ het beste als een covariant vectorveld kunnen opvatten. Dan is er geen sprake van een inproduct, maar gewoon de natuurlijke werking van een 1-vorm op de (contravariante) vector $\mathrm{d}s$. Maar ook dit laatste is nog steeds wiskundig wat slipperig. Beter is om gewoon de raakvector aan de kromme te nemen. Maar een raakvector aan de kromme krijgen we alleen maar door de kromme te parametriseren. Als we dat doen, dan zijn de coördinaten (x, y) op de kromme functies van een parameter t: $x = x(t)$ en $y = y(t)$. De raakvector is dan

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

Stel dat we nu een 1-vorm hebben, nu genoteerd als (dus in plaats van $\vec{V}$):

$$\alpha = a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y$$

Dan berekenen we nu de integraal:

$$\int_S \alpha = \int_S a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y = \int\limits_{t=t_P}^{t=t_Q} (a_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t$$

Een eenvoudig voorbeeld:

$$\alpha = y\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$$

En S is het lijnstuk van de oorsprong $P(0,0)$ naar het punt $Q(1,2)$. Een voor de hand liggende parametrisering is $[0,1] \ni t \to (x(t), y(t)) = (t, 2t)$. Immers als t van 0 naar 1 loopt dan gaat $(t, 2t)$ van $P(0,0)$ naar $Q(1,2)$.

$$\int_S \alpha = \int\limits_{t=t_P}^{t=t_Q} (a_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t = \int\limits_{t=0}^{t=1} (y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t$$
$$= \int\limits_{t=0}^{t=1} (2t.1 + 2.2)\mathrm{d}t = \int\limits_{t=0}^{t=1} (2t+4)\mathrm{d}t = \left[t^2 + 4t\right]_0^1 = 5$$

Zou dit getal niet van de parametrisering kunnen afhangen? Laten we maar eens een andere proberen. Bijvoorbeeld $[0,1] \ni t \to (x(t), y(t)) = (t^2, 2t^2)$. Dan hebben we dus:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \quad \text{en} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4t$$

En de berekening wordt dan:

$$\int_S \alpha = \int\limits_{t=t_P}^{t=t_Q} (a_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t = \int\limits_{t=0}^{t=1} (y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t$$
$$= \int\limits_{t=0}^{t=1} (2t^2.2t + 2.4t)\mathrm{d}t = \int\limits_{t=0}^{t=1} (4t^3 + 8t)\mathrm{d}t = \left[t^3 + 4t^2\right]_0^1 = 5$$

Het lijkt dus niet uit te maken. Dit is geen toeval. Stel namelijk in het algemeen dat we een andere parameter s hebben. Er is dan wel een 1-op-1 verband met de parameter t, dus we kunnen s zien als functie van t: $s = s(t)$. Dan (substitutieregel in de integraal en kettingregel onder de integraal):

$$
\begin{aligned}
&= \int_{s=s_P}^{s=s_Q} (a_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + a_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s})\mathrm{d}s = \int_{t=t_P}^{t=t_Q} (a_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} + a_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s})\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=t_P}^{t=t_Q} (a_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t=t_P}^{t=t_Q} (a_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Samenvatting tot nu. Laten we even kijken waar we nu staan. We hebben geconstateerd dat $\int_S \alpha$ een waarde kan krijgen in de volgende gevallen:

S	α
0-dimensionaal	0-vorm (scalarveld)
1-dimensionaal	1-vorm
2-dimensionaal	2-vorm ??

Het patroon is duidelijk: Als S een n-dimensionaal stuk ruimte is dan kun je een n-vorm daarover integreren.

4 Wat zijn 2-vormen?

Een 1-vorm was een covariante tensor van rang 1. Ook kunnen we zeggen dat het een $(0,1)$-tensor is. Een 2-vorm zal dan wel een covariante tensor van rang 2 zijn, ofwel een $(0,2)$-tensor. Maar die kennen we. We hebben bijvoorbeeld de metrische tensor $g_{\mu\nu}$. We schreven die wel eens op als een *lijnelement*. Voorbeelden (van (3.4) en (3.5) op bladzijde 66 en (3.51) op bladzijde 204):

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \\
\alpha &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 \\
\alpha &= (1+\frac{1}{25}u^2)\mathrm{d}u^2 + \frac{2}{5}u\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

We hebben $\mathrm{d}s^2$ vervangen door α, want het betreft nu echt $(0,2)$-tensoren. Ook de notatie is nu ineens precies en correct. Immers als we twee 1-vormen $\alpha = a_\mu$ en $\beta = b_\nu$ hebben dan is het tensorproduct $\alpha\beta = a_\mu b_\nu$ een $(0,2)$-tensor. En aangezien bijvoorbeeld $\mathrm{d}x$ en $\mathrm{d}y$ 1-vormen zijn (in de tweedimensionale ruimte vormen die zelfs een basis van de duale raakruimte) dan zijn $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}y^2$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ allemaal $(0,2)$-tensoren. De laatste twee zijn ook verschillend! Om die reden kunnen we het uv-lijnelement (5) het beste als volgt schrijven:

$$\alpha = (1+\frac{1}{25}u^2)\mathrm{d}u^2 + \frac{1}{5}u\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \frac{1}{5}u\mathrm{d}v\mathrm{d}u + \mathrm{d}v^2$$

Of misschien nog beter:

$$\alpha = (1+\frac{1}{25}u^2)\ \mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u + \frac{1}{5}u\ \mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v + \frac{1}{5}u\ \mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u + \ \mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v$$

Waar bij de notatie $\otimes$ beter tot uitdrukking laat komen dat het hier om het *tensorproduct* gaat (en dat is in het algemeen niet commutatief). Nu komen de factoren ook precies overeen met de (symmetrische!) matrix:

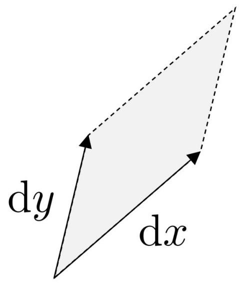
$$\mathrm{d}s^2 = \begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{25}u^2 & \frac{1}{5}u \\ \frac{1}{5}u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}$$

Die symmetrie drukten we met de indexnotatie uit door $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

5 Scheef symmetrische 2-vormen.

Zijn dit nu de differentiaalvormen van rang 2 die we nodig hebben als we die willen integreren over een tweedimensionale stuk ruimte S? In eerste instantie lijkt dit wel het geval, want een typische oppervlakte-integraal ziet er bijvoorbeeld als volgt uit:

$$\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



Figuur 2: Oppervlakte element

Maar toch moeten we hier even zorgvuldig over nadenken. De uitdrukking $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ fungeert hier, intuïtief gesproken, als een infinitesimaal oppervlakte element. Zie figuur 2. Maar wat dan te denken van:

$$\iint f(x,y)\mathrm{d}x^2$$

De 'twee' infinitesimale 'vectortjes' $\mathrm{d}x$ en $\mathrm{d}x$ liggen in dezelfde richting, dus $\mathrm{d}x^2$ heeft naar ons gevoel geen oppervlakte. Bovendien herinneren we ons dat bij de integraal over een oppervlakte van bijvoorbeeld een vectorveld (de 'flux') de oriëntatie een rol speelde (zie bladzijde 20 bovenste regels). We bedenken ons dat $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en $\mathrm{d}x^2$ tensorproducten zijn van twee 1-vormen. Dus beter genoteerd als $\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y$ en $\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x$. Misschien moeten dat product vervangen door een ander soort product, te noteren met behulp van het symbool $\wedge$, zodanig dat $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$ (oriëntatie) en $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$.

Als we hier maar lang genoeg over nadenken zouden we tot de volgende geniale gedachte kunnen komen: misschien moeten we scheef symmetrische 2-vormen gebruiken!? Laten we ons daar eens even in verdiepen. Eerst maar eens even een algemene $(0,2)$-tensor $a_{\mu\nu}$. Deze kan nu ook als volgt geschreven worden (dimensie ruimte is nog steeds 2):

$$a_{11}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + a_{12}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + a_{21}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x + a_{22}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$$

De metrische tensor was een symmetrische $(0,2)$-tensor: $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Dat betekent bijvoorbeeld dat er 3 onafhankelijke componenten zijn, als de dimensie 2 is: g_{11}, g_{22} en $g_{12} = g_{21}$. Zie rij 2 in tabel 1. Als de dimensie van de ruimte 3 is, dan heeft een symmetrische $(0,2)$-tensor 6 onafhankelijke

D	Symmetrisch		Scheef symmetrisch		
	A	Matrix	A	Matrix	Vorm
2	3	$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$	$2a\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$
3	6	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$	$2a\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ $+2b\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ $+2c\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$

Tabel 1: 2-vormen. Symmetrisch en scheef symmetrisch

componenten. Dit is in te zien door aan een symmetrische 3 bij 3 matrix te denken. Zie nu rij 3 in tabel 1. In de kolommen 'A' staat het aantal onafhankelijke componenten van de vorm.

6 Scheef symmetrisch maken.

We hebben hierboven al even genoemd dat we $\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y$ willen vervangen door $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Meer in het algemeen willen we het *wigproduct* voor twee vormen definiëren. Dit zal dan weer scheef symmetrisch moeten zijn. Dat betekent dat verwisselen van twee indices tot een minteken leidt, bijvoorbeeld voor een 3-vorm:

$$a_{\mu\nu\tau} = -a_{\mu\tau\nu} \quad \text{en ook bijvoorbeeld} \quad a_{\mu\nu\tau} = a_{\tau\nu\mu}$$

Heel in het algemeen geldt: een m-vorm is scheef symmetrisch als

$$a_{\mu_{p(1)}\mu_{p(2)}\cdots\mu_{p(m)}} = -a_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}$$

Voor alle *oneven* permutaties[1] p van de verzameling getallen 1,2,...,m.

Nu kunnen we van een willekeurige m-vorm (covariante tensor van rang m) $a_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}$ altijd een scheef symmetrische $b_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}$ versie maken, en wel

[1] Zie bijvoorbeeld https://nl.wikipedia.org/wiki/Permutatie

als volgt:

$$b_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m} := \sum_{p \text{ permuatie}} \frac{1}{m!}(-1)^{\mathrm{pr}(p)} a_{\mu_{p(1)}\mu_{p(2)}\cdots\mu_{p(m)}}$$

Hierbij is $\mathrm{pr}(p)$ de *pariteit* van de permutatie p, dat wil zeggen 0 als p even en 1 als p is oneven is. Een voorbeeld van deze indrukwekkende formule:

$$b_{\mu\nu\tau} := \frac{1}{6}(a_{\mu\nu\tau} + a_{\nu\tau\mu} + a_{\tau\mu\nu} - a_{\mu\tau\nu} - a_{\tau\nu\mu} - a_{\nu\mu\tau})$$

De factor $\frac{1}{m!}$ zorgt ervoor dat als we deze operatie toepassen op een vorm die zelf reeds scheef symmetrisch is, dan krijgen we dezelfde weer terug. Wanneer we deze definitie toepassen op een algemene 2-vorm $a_{\mu\nu}$ en de dimensie is 2, dan krijgen we (alle componenten tegelijk opgeschreven in de vorm van een matrix):

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{21} \\ a_{21} - a_{12} & a_{22} - a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

7 Het wigproduct $\wedge$.

Dan zijn we nu toe aan de definitie van het *wigproduct* ook wel *uitwendig product* genoemd. Het idee is simpel: als we twee vormen α en β hebben dan ontstaat $\alpha \wedge \beta$ door eerst het tensorproduct te nemen en dit vervolgens scheef symmetrisch te maken volgens bovenstaande procedure. We zien dus dat we het wigproduct gedefinieerd is voor twee willekeurig vormen α en β. Maar we beperken ons in principe sowieso tot scheef symmetrische vormen.

Laten we naar een simpel maar belangrijk voorbeeld een kijken: $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Als we hebben $\alpha = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y$ dan is $a_{11} = a_{22} = a_{21} = 0$ en $a_{12} = 1$. Dan zien we aan (6) dat $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = \frac{1}{2}$ en $b_{21} = -\frac{1}{2}$. Dus:

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{1}{2}(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y - \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y) = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$$

Deze vermenigvuldiging is distributief:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

Voor 1-vormen geldt anti-commutativiteit:

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$$

Dit geldt niet algemeen. Bijvoorbeeld (4-dimensionaal):

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= (\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) \wedge (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)
\end{aligned}$$

Het verwisselen van plaats van twee 2-vormen geeft een minteken. Dat hebben we hierboven ook gebruikt.

Stel de dimensie van de ruimte is n. Hoeveel onafhankelijke componenten heeft nu een m-vorm? We kunnen dit op twee manieren bekijken. We beginnen met de indexnotatie: $a_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}$. Als we twee indexen verwisselen krijgen de tegengestelde waarde, dus niet echt een nieuwe onafhankelijke component. We kunnen dus wel aannemen dat de indexen oplopend zijn genoteerd. Dus bijvoorbeeld a_{235} in plaats van a_{253}. Hieraan zien we dat er evenveel onafhankelijke componenten zijn als dat we m objecten kunnen kiezen vanuit een verzameling van n dingen. Nu weten we vanuit de combinatieleer dat dit op

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

manieren kan. Als we ons, voor wat voorbeelden, beperken tot een 3-dimensionale ruimte. Dan hebben we de mogelijkheden die in tabel 2 zijn opgesomd.

Merk op dat deze definitie van uitwendig product betrekking heeft op covariante tensoren in één punt. We hebben niet nodig dat het tensor*velden* zijn (dat kunnen het wel zijn). Bij het concept van de volgende paragraaf is dat echter wel essentieel.

m	$\binom{3}{m}$	vorm	type
0	1	a	scalar(-veld)
1	3	$a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z$	vector(-veld)
2	3	$b_x \; \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b_y \; \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + b_z \; \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	vector(-veld)
3	1	$a \; \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$	scalar(-veld)

Tabel 2: Scheef symmetrische vormen in een 3 dimensionale ruimte.

8 Uitwendige afgeleide.

Rest ons nog de definitie van de differentiaaloperator d. Zoals gezegd betreft het nu velden. Gegeven een scheef symmetrisch covariant tensorveld ω van rang m dan zal $\mathrm{d}\omega$ zo'n veld van rang $m+1$ zijn. De definitie gaat met inductie naar m. We beginnen dus met $m = 0$. Het veld ω is dan dus een scalarveld. Als we coördinaten $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ kiezen dan hoort bij ω dus een functie F van n variabelen: $F = F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Dan definiëren we:

$$\mathrm{d}F := \frac{\partial F}{\partial x^1}\phi^1 + \frac{\partial F}{\partial x^2}\phi^2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x^n}\phi^n = \frac{\partial F}{\partial x^\mu}\phi^\mu \tag{7}$$

Hierbij is $\{\phi^1, \phi^1, \ldots, \phi^n\}$ de reeds eerdergenoemde basis van de duale ruimte in elk punt. We moeten nog wel nagaan dat deze definitie niet afhangt van de coördinaatkeuze, maar dat laten we hier achterwege. We noemen (7) axioma Ax0 voor de operator d. Zo dadelijk volgen nog meer axioma's.

Voordat we verder gaan eerst nog even een belangrijk punt dat we nog hebben laten liggen. Laten eens kijken wat er gebeurt als we voor F een functie nemen die met één van de coördinaten x^ν overeenkomt. Per slot is x^ν een functie die op de ruimte is gedefinieerd. Dus we nemen

$$F(x^1, x^2, \ldots, x^n) := x^\nu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu$$

Dus als we de definitie van d (7) toepassen dan krijgen we:

$$\mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x^\mu}\phi^\mu = \delta^\nu_\mu \phi^\mu = \phi^\nu$$

Hier staat dus dat $\phi^\nu = \mathrm{d}x^\nu$. En daar hadden we in het voorafgaande al een voorschot op genomen. We hebben nu de eerdere totale differentiaal (4) volledig geformaliseerd.

De definitie van de d operator, ook voor vormen van rang $m \geq 1$, is gebaseerd op de volgende axioma's:

Axioma's voor differentiaaloperator d

Ax0. Voor scalaire velden (0-vormen) geldt (7);

Ax1. De operatie d is *lineair*: $\mathrm{d}(\alpha + \beta) = \mathrm{d}(\alpha) + \mathrm{d}(\beta)$;

Ax2. Voor de 1-vorm velden ϕ^ν die ontstaan bij de keuze van een coördinatensysteem geldt dat $\mathrm{d}\phi^\nu = 0$;

Ax3. De beperkte productregel geldt:

a. Als rang $\alpha = 0$, dan $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$

b. Als rang $\alpha = 1$, dan $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$

Een paar opmerkingen bij deze axioma's. Bij Ax2 staat in feite $d^2 x^\nu = 0$, immers we hadden geconstateerd dat $\phi^\nu = \mathrm{d}x^\nu$. Heel algemeen blijkt te gelden:

$$d^2\omega = 0 \tag{8}$$

Bij axioma Ax3 beperken we ons kennelijk tot de gevallen dat de rang van de eerste vorm (α) 0 of 1 is. Maar ook hier blijkt dan een algemenere vorm te gelden:

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^m \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \quad \text{waar } m \text{ de rang van } \alpha \text{ is.} \tag{9}$$

We moeten nu wel het één en ander bewijzen. Ten eerste dienen we ons ervan te vergewissen dat zo'n operator kan bestaan. Dat is zo en bovendien blijken de axioma's de operator d uniek te bepalen. Verder moeten we natuurlijk de beweringen (8) en (9) verifiëren. We doen het een en ander schetsmatig en het belangrijkste is daarbij dat we tegelijkertijd zien hoe we met d kunnen/moeten rekenen. De gedachtegang is niet moeilijk, maar vanwege de zee van indexen voor het algemene geval, is het misschien verstandig om eerst vooruit te kijken naar de concrete voorbeelden in §9.

Zoals gezegd bepaalt Ax0 (7) de operator d al voor 0-vormen (scalarvelden). Een willekeurige m-vorm ziet er nu zo uit:

$$\omega = a_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m}\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m}$$

Hier staat een som omdat de sommatieconventie van toepassing is. Dankzij axioma Ax1 kunnen we ons bij het bepalen van dω ons beperken tot één term. We kunnen dus bestuderen:

$$\omega = a\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m} = a\, \overline{\alpha} \tag{10}$$

Hierbij is a dus een scalaire functie en $\overline{\alpha}$ een product van pure basis 1-vormen. We tonen nu aan dat de operator d, toegepast op zo'n product 0 is. Dit doen we met inductie naar m. Als $m = 1$ dan is dit Ax2. Stel nu dat het bewezen is voor $m - 1$, dan

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\overline{\alpha}) \quad &= \quad \mathrm{d}\left(\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m}\right) \\
&\overset{\text{Ax3.b}}{=} \quad \mathrm{d}^2 x^{\mu_1} \wedge \left(\mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m}\right) - \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}\left(\mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m}\right) \\
&\overset{\text{Ax2}}{=} \quad 0 \wedge \left(\mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m}\right) - \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}\left(\mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m}\right) \\
&\overset{\text{Inductie}}{=} \quad 0 \wedge \left(\mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m}\right) - \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge 0 \\
&= \quad 0 - 0 = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Dan kunnen we nu een uitdrukking vinden voor dω in (10).

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(a\,\overline{\alpha}) \\
&\overset{\text{Ax3.a}}{=} \mathrm{d}(a)\,\overline{\alpha} + a\,\mathrm{d}(\overline{\alpha}) \\
&\overset{(11)}{=} \mathrm{d}(a)\,\overline{\alpha} + a\,0 \\
&\overset{\text{Ax0}}{=} (\frac{\partial a}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu) \wedge \overline{\alpha} \\
&\overset{\text{Ax1}}{=} \frac{\partial a}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \overline{\alpha} \\
&= \sum_{\mu\notin\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}} \frac{\partial a}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \overline{\alpha}
\end{aligned}$$

De laatste gelijkheid is gebaseerd op het feit dat als μ gelijk is aan één van de elementen $\mu_1, \ldots, \mu_m$, dan is d$x^\mu \wedge \overline{\alpha} = 0$. Hiermee is bewezen dat dω uniek is bepaald door de axioma's. Laten eens kijken waarom $d^2 = 0$ (8) in het algemeen waar is. We schrijven d$^2\omega$ op door d nog een keer op bovenstaande toe te passen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2\omega &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) \\
&= \mathrm{d}\left(\sum_{\mu\notin\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}} \tfrac{\partial a}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \overline{\alpha}\right) \\
&= \sum_{\mu\notin\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}} \mathrm{d}\,\left(\tfrac{\partial a}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \overline{\alpha}\right) \\
&= \sum_{\mu\notin\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}} \left(\sum_{\nu\notin\{\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m\}} \tfrac{\partial^2 a}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \overline{\alpha}\right) \\
&= \sum_{\nu,\mu\notin\{\mu_1,\ldots,\mu_m\} \text{ en } \nu\neq\mu} \left(\tfrac{\partial^2 a}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \overline{\alpha}\right) \\
&= \sum_{\nu,\mu\notin\{\mu_1,\ldots,\mu_m\} \text{ en } \nu>\mu} \left(\tfrac{\partial^2 a}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \tfrac{\partial^2 a}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \overline{\alpha} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Hetgeen te bewijzen was. U ziet dat we hier de Leibnitz-regel $\frac{\partial^2 a}{\partial x^\nu \partial x^\mu} =$

$\frac{\partial^2 a}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ hebben gebruikt. Bovenstaande afleiding is wat duidelijker in het simpele (maar significante) geval dat $\omega = a\, \mathrm{d}z$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2\omega &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) \\
&= \mathrm{d}\{\mathrm{d}(a\, \mathrm{d}z)\} \\
&= \mathrm{d}\left(\tfrac{\partial a}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \tfrac{\partial a}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\tfrac{\partial a}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z\right) + \mathrm{d}\left(\tfrac{\partial a}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\right) \\
&= \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\
&= (\frac{\partial^2 a}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y})\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nu we toch bezig zijn met complex lijkende afleidingen kunnen we (9) ook nog wel even doen. Vanwege de lineariteit Ax1 kunnen we ons weer beperken tot het geval dat α en β slecht één term hebben. Analoog aan (10) schrijven we

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m} = a\,\overline{\alpha} \\
\beta &= b\,\mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\nu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_p} = b\,\overline{\beta}
\end{aligned}$$

Dan gaat de afleiding (die u natuurlijk al zelf even geprobeerd heeft) als volgt ($W := \{\mu_1, \ldots, \mu_m, \nu_1, \ldots, \nu_p\}$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) &= \mathrm{d}(a\,\overline{\alpha} \wedge b\,\overline{\beta}) \\
&= \mathrm{d}(ab\,\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}) \\
&= \sum_{\tau \notin W} \frac{\partial}{\partial x^\tau}(ab)\,\mathrm{d}x^\tau \wedge \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta} \\
&= \sum_{\tau \notin W} (\frac{\partial a}{\partial x^\tau} b + a \frac{\partial b}{\partial x^\tau})\,\mathrm{d}x^\tau \wedge \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta} \\
&= \sum_{\tau \notin W} \frac{\partial a}{\partial x^\tau} b\,\mathrm{d}x^\tau \wedge \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta} + \sum_{\tau \notin W} a \frac{\partial b}{\partial x^\tau}\,\mathrm{d}x^\tau \wedge \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta} \\
&\stackrel{1}{=} \sum_{\tau \notin W} \frac{\partial a}{\partial x^\tau} b\,\mathrm{d}x^\tau \wedge \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta} + (-1)^m \sum_{\tau \notin W} a \frac{\partial b}{\partial x^\tau}\,\overline{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^\tau \wedge \overline{\beta} \\
&= \sum_{\tau \notin W} \frac{\partial a}{\partial x^\tau}\,\mathrm{d}x^\tau \wedge \overline{\alpha} \wedge b\,\overline{\beta} + (-1)^m a\,\overline{\alpha} \wedge \sum_{\tau \notin W} \frac{\partial b}{\partial x^\tau} \mathrm{d}x^\tau \wedge \overline{\beta} \\
&= \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^m \alpha \wedge \mathrm{d}\beta
\end{aligned}$$

Een extra toelichting bij de overgang $\stackrel{1}{=}$ (het ontstaan van de factor $(-1)^m$):

$$\mathrm{d}x^\tau \wedge \overline{\alpha} = \mathrm{d}x^\tau \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m}$$
$$= (-1)^m\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_m} \wedge \mathrm{d}x^\tau = (-1)^m\,\overline{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^\tau$$

Om $\mathrm{d}x^\tau$ naar achter te schuiven moeten we immers m keer verwisselen.

Het is misschien goed om op te merken dat bij alle definities tot nu toe we nergens gebruik hebben gemaakt van een metriek. Dit in tegenstelling tot het in deel 4 te definiëren *covariant* differentiëren.

9 Verband met ∇-operatoren.

Dit is het boeiendste deel van dit artikel. We gaan weer uit van een 3-dimensionale ruimte.

TAAK

Bepaal in de gevallen dat ω een vorm is van rang 1 of 2 een expliciete uitdrukking voor $\mathrm{d}\omega$ en zie het verband met de ∇-operatoren.

Rotatie. Stel $\omega = a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z$. Dit is de 1-vorm zoals in tabel 2 in de tweede rij opgeschreven. Om $\mathrm{d}\omega$ te berekenen moet we dus $\mathrm{d}(a_x \mathrm{d}x)$ en dergelijke uitrekenen. Daar gaan we:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(a_x \mathrm{d}x) &= \mathrm{d}(a_x) \wedge \mathrm{d}x \\
&= (\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial a_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial a_x}{\partial z}\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}x \\
&= \frac{\partial a_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial a_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial a_x}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&= \frac{\partial a_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial a_x}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Op dezelfde manier:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(a_y \mathrm{d}y) &= \frac{\partial a_y}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial a_y}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \\
\mathrm{d}(a_z \mathrm{d}z) &= \frac{\partial a_z}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial a_z}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Nu kunnen we $\mathrm{d}\omega$ bepalen door dit allemaal op te tellen. We brengen het resultaat in de vorm zoals in tabel 2 in de derde rij opgeschreven:

$$\mathrm{d}\omega = (\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z})\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y})\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

En als we goed kijken herkennen we hier de rotatie:

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{a}$$

Divergentie. Stel nu $\omega = b_x \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b_y \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + b_z \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Dit is de 1-vorm zoals in tabel 2 in de derde rij opgeschreven. Om $\mathrm{d}\omega$ te berekenen moet we dus $\mathrm{d}(b_x \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$ en dergelijke uitrekenen. Daar gaan we:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(b_x \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) &= \mathrm{d}(b_x) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= (\frac{\partial b_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial b_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial b_x}{\partial z}\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= \frac{\partial b_x}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

De laatste twee termen vallen weg omdat $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0$ en $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0$. Op dezelfde manier krijgen we ook:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(b_y \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) &= \frac{\partial b_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
\mathrm{d}(b_z \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= \frac{\partial b_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Als we dit allemaal optellen krijgen we:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(b_x \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b_y \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + b_z \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \\
&= \mathrm{d}(b_x \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + \mathrm{d}(b_y \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) + \mathrm{d}(b_z \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \\
&= \frac{\partial b_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial b_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial b_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial b_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial b_y}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial b_z}{\partial z}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= (\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{\partial b_z}{\partial z})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= a\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

En als we weer goed kijken herkennen we hier de divergentie:

$$a = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{b}$$

rang ω	$\mathrm{d}\omega$	$\mathrm{d}^2\omega = 0$	Stelling variant
0	$\nabla\phi$		Hoofdstelling
1	$\nabla \times \vec{V}$	$\nabla \times (\nabla\phi) = 0$	Green of Kelvin-Stokes
2	$\nabla \cdot \vec{V}$	$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$	Ostrogradsky-Gauss

Tabel 3: Overeenkomst d- en ∇-operator.

Samenvatting. We hebben dit samengevat in de tabel 3. Er is nog een kolom toegevoegd die de relatie $\mathrm{d}^2 = 0$ in de ∇-operator vertaald voor twee gevallen. We krijgen hierbij precies de twee gevallen terug in we in §6.2, de uitwerking van opgave 9 ook hebben ontdekt:

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \qquad \text{De rotatie van een gradiënt is altijd 0.}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0 \qquad \text{De divergentie van een rotatie is altijd 0.}$$

Met andere woorden: wat we toen hebben ontdekt zijn gewoon twee speciale gevallen van de algemene regel (8), $\mathrm{d}^2 = 0$, voor differentiaalvormen.

Vormen van Stokes. We kunnen nu ook inzien waarom de stellingen die in §A1 genoemd zijn bijzondere gevallen zijn van de (algemene) stelling van Stokes. Als u de tabel A.1 op bladzijde 249 bekijkt dan ziet u deze relatie door te bedenken dat de dimensie van de rand ∂S overeen moet komen met de rang van de vorm ω. Het verschil tussen de stelling van Green en Kelvin-Stokes zit dan alleen in de dimensie van de omringende ruimte. In de derde kolom van tabel 3 hebben we de namen van de stellingen erbij gezet.

10 Exact versus gesloten vormen.

De regel (8), $\mathrm{d}^2 = 0$ heeft een interessant gevolg:

$$\text{Er is een vorm } \alpha \text{ zodat } \omega = \mathrm{d}\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\omega = 0 \tag{12}$$

In woorden: als een vorm een differentiaal van een andere is, dan is zijn differentiaal 0. Immers dan $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}^2\alpha = 0$. De volgende terminologie[2] wordt gebruikt. Men noemt een vorm ω *gesloten* als $\mathrm{d}\omega = 0$. Een vorm heet *exact* als hij de differentiaal is van een andere ($\omega = \mathrm{d}\alpha$). De stelling (12) kan dus ook als volgt worden verwoord:

Een exacte vorm is ook gesloten.

De grote vraag is: kan (12) ook worden omgedraaid? Dus als $\mathrm{d}\omega = 0$ kan ω dan worden *geïntegreerd*? Dat wil zeggen: bestaat er een α zodat $\omega = \mathrm{d}\alpha$? Het antwoord op deze vraag is: bijna altijd wel (het lemma van Poincaré[3]), maar in het algemeen niet. Er kunnen namelijk topologische obstructies zijn.

Dit is zeer interessante stof. Deze is bijvoorbeeld van belang voor de vraag of er bij een krachtenveld een potentiaal hoort of niet. Daarom gaan we hier in een tweede versie van dit document dieper op in als deel 4 van de serie ook uit is.

[2]Ik heb zelf wel een ezelsbruggetje hier nodig. In het woord 'gesloten' zit een 'o' en die lijkt op 0.

[3]Zie bijvoorbeeld Manifolds, Tensors and Forms (Renteln P.)