Extra opgaven bij het boek

Elektromagnetisme, Relativiteit

Auteur: Dr. H. (Harm) van der Lek

Versie 1

Inhoudsopgave

1 Vectorvelden en elektromagnetisme

1.1 Zwaartekracht binnen de aarde

Stel $\vec{g} := -C\vec{r} = -C(x, y, z)$ (dus b.v. $g_x = -Cx$) waarbij C een positieve constante.

a. Wat is de waarde van $|\vec{g}|$?

b. Bereken $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ en trek daaruit conclusies over de zwaartekracht binnen de aarde.

c. Bereken ook $\vec{\nabla} \times \vec{g}$.

1.2 Divergentie en rotatie

Stel $\vec{b} := (y, -x, 0)$.

a. Bereken $\vec{\nabla} \cdot \vec{b}$.

b. Bereken ook $\vec{\nabla} \times \vec{b}$.

c. Kunt u zich iets (fysisch) bij voorstellen?

1.3 Sferisch symmetrisch veld

Laten we aannemen dat we een sferisch symmetrisch veld hebben. Dan mogen we aannemen dat dit van de vorm $\vec{g} = f(r)\vec{r} = f(r)(x, y, z)$ is.

a. Los dit op voor de (buiten de oorsprong) lege ruimte, m.a.w. probeer de functie f te bepalen door $\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0$.

1.4 Trein in tunnel paradox

De Lorentz-contractie heeft veel mensen (die het in eerste instantie nog niet goed begrepen) geïnspireerd tot het bedenken van paradoxen. Van de volgende zijn er veel variaties in omloop, bekend onder namen als 'pole in the barn' ('paal in de schuur'). Wij nemen hier de 'trein in tunnel' variant.

De redenering gaat als volgt. Stel een trein rijdt met grote snelheid door een tunnel. Bij meeting voorafgaande aan de proef bleek de trein een klein beetje langer dan de tunnel. Volgens de Lorentz contractie zien wij de trein echter wat ingekort en past hij dus wel helemaal in de tunnel. Maar alle stelsels zijn gelijkwaardig. Dus voor iemand in de trein komt de tunnel met grote snelheid langs en is dus wat korter. De trein past dus helemaal niet in de tunnel. Dit is een tegenspraak! Past de trein nu wel of niet in de tunnel?

a. Schets een tijdweg diagram van de situatie waaruit blijkt dat het helemaal geen paradox is.

In een tijdweg diagram geven we één van de ruimtedimensies aan en de tijdsdimensie. Een punt in zo'n diagram representeert dan een gebeurtenis ('puntgebeurtenis')

b. Geef in uw diagram de volgende punten (gebeurtenissen) aan: De achter- en voorkant (A resp. B) van de trein op een moment dat de trein, volgens de waarnemer naast de tunnel, geheel binnen de tunnel is. De achter- en voorkant (P resp. Q) op een moment, volgens de waarnemer in de trein, de achterkant nog niet in de tunnel is, maar de voorkant er wel al weer uit.

Een fraaie illustratie van deze 'paradox' kunt u vinden op `www.youtube.com/watch?v=Xrqj88zQZJg` .

2 Lorentz transformatie en mechanica

2.1 Dopplereffect

Het Dopplereffect is bekend uit het gewone leven: als een politieauto naar je toe komt rijden, dan klinkt de sirene hoger dan hij wordt uitgezonden. En lager als de auto van je wegrijdt. Er is een klassieke verklaring voor. Stel de zender (Z) en de ontvanger bewegen ten opzichte van elkaar met een snelheid van v. Om de gedachten te bepalen: $v > 0$ als Z en O naar elkaar toe bewegen. Noem de frequentie van het signaal dat de zender uitzendt: f_Z. De frequentie zoals door de ontvanger wordt ervaren noemen we: f_O. De snelheid van de golfbeweging door het medium (lucht in geval van geluid; de ether in het geval van het klassieke licht) noemen we c. In de onderdelen a. t/m b. bekijken we de klassieke situatie.

a. Bepaal een formule voor f_O in termen van f_Z, v en c in het geval dat *de zender stilstaat* ten opzichte van het medium;

Met andere woorden: ergens staat een sirene op een gebouw en wij rijden ernaartoe. Voor een controle op uw antwoord: verifieer dat $f_O > f_Z$ in het geval dat $v > 0$.

b. Bepaal een formule voor f_O in termen van f_Z, v en c in het geval dat *de ontvanger stilstaat* ten opzichte van het medium;

Met andere woorden: wij staan stil en de politieauto rijdt naar ons toe. Ook hier moet weer gelden dat $f_O > f_Z$ in het geval dat $v > 0$.

c. Laat zien dat de formules van a. en b. ongeveer hetzelfde zijn als $v \ll c$;

Nu gaan we de situatie relativistisch bekijken. Het aardige is dat het Dopplereffect voor licht gewoon overeind blijft. Alleen blijkt er nu maar één formule voor beide gevallen te zijn. Dat is logisch want de lichtsnelheid is dan in alle stelsels hetzelfde en de stelsels van de Zender en Ontvanger zijn gelijkwaardig.

d. Bepaal een formule voor f_O in termen van f_Z, v en c in het relativistische geval en laat zien dat dit voor $v \ll c$ overeenkomt met de klassiek gevallen;

Voor hint zie 4.1.

2.2 Constante kracht

Als we klassiek een voorwerp met massa m_0, dat op $t = 0$ de waarde $x = 0$ heeft (dus $x(0) = 0$) en dat nog geen snelheid heeft ($v(0) := \dot{x}(0) = 0$), onderwerpen aan een constante kracht F in de positieve x-richting, dan is de baan van dit voorwerp gekarakteriseerd door $x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m_0}t^2$. Voor de snelheid geldt dan: $v(t) := \dot{x}(t) = \frac{F}{m_0}t$. Op een zeker moment, namelijk als $t = \frac{m_0 c}{F}$, dan wordt $v(t) > c$. Dit mag relativistisch natuurlijk niet gebeuren.

a. Bepaal een formule voor $x(t)$ in het relativistische geval;

Ook hier nemen we aan dat $\vec{x}(0) = 0$ en $\vec{v}(0) = 0$. U mag hierbij aannemen dat de kracht in de positieve x-richting werkt $\vec{F} = (F_x, 0, 0)$ de gewone kracht is $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p})$ is met $\vec{p} = m\vec{v}$ en $m = \gamma m_0$. Neem dus aan dat $F_x = F =$ constant.

Opmerking (niet relevant voor de opgave, maar om verwarring te voorkomen): F_x is *niet* de x-component van de 4-kracht f^μ. Wel geldt: $f^1 = \gamma F_x$.

b. Laat zien dat dit voor $\frac{Ft}{m_0} \ll c$ overeenkomt met de klassieke formule;

2.3 Muonen

Muonen zijn elementere deeltjes met een extreem korte leeftijd: ongeveer 2,2 maal 10^{-6} seconde! Dit is in hun 'eigentijd'. Zij kunnen hier op aarde in versnellers gemaakt worden en daarbij is dit gemeten. Zij ontstaan echter ook in de bovenkant van de dampkring op ongeveer 10 kilometer hoogte, door botsing van zeer energierijke kosmische straling met de dampkring. Zij hebben dan een snelheid van ongeveer 0,995 maal de lichtsnelheid.

a. Laat zien dat, ondanks de enorme snelheid, volgens een klassieke (pre-relativistische) redenering de extreem korte levensduur ervoor zorgt dat zo'n muon de aarde toch (bijna) nooit zal bereiken;

Toch blijkt uit proeven en metingen dat zeer veel muonen het aardoppervlak bereiken.

b. Bereken, gedacht vanuit het referentie stelsel van de aarde, waarom dit toch wel kan.

c. Wat is, vanuit het referentie stelsel van het muon gezien, de reden dat het makkelijk de aarde kan bereiken?

2.4 Optellen snelheden associatief

Voor gewone optelling hebben we de associativiteitsregel:

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

Vandaar dat we gewoon $u + v + w$ kunnen schrijven, zonder kans op verwarring. Laten we de optelling van snelheden in de relativiteitstheorie noteren met $\oplus$, dus:

$$u \oplus v := \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

a. Laat zien dat deze manier van optellen ook associatief is, met andere woorden dat geldt:

$$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$$

Indien u een hint nodig heeft, zie paragraaf 4.2.

2.5 Gelijktijdige gebeurtenissen

Stel om 12.00 uur ontploft er een bom ergens op aarde (gebeurtenis P). Precies een minuut later (dus om 12.01 uur) vindt er een eruptie plaats op de zon (gebeurtenis Q).

a. Laat zien dat de invariant I negatief is.

Het ruimtetijd interval tussen deze twee gebeurtenissen is dus *ruimtelijk*. Dat wil zeggen dat er een referentie systeem is waarin deze twee gebeurtenissen op exact hetzelfde moment plaatsvinden. Stel dit is een ruimteschip dat zich beweegt op de lijn tussen de Zon een de Aarde.

b. Bepaal de snelheid v van dit ruimteschip.

Gebruik de volgende waarden:

$$\begin{aligned} \text{lichtsnelheid} \quad &: \quad c = 300.000 \text{ km/sec} \\ \text{afstand Aarde-Zon} \quad &: \quad \Delta x = 150.000.000 \text{ km} \end{aligned}$$

Voor een hint zie paragraaf 4.3

3 Tensor formulering Elektromagnetisme

3.1 Energie in een elektromagnetisch veld

We hebben de zes 6 functies (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y en B_z) van 4 variabelen: plaats (x, y, z) en tijd (t) zijnde het elektromagnetisch veld. In de theorie hierover kan men een formule afleiden voor de energieinhoud van zo'n veld (niet zo makkelijk!). Voor een statisch elektrisch veld wordt dit $\frac{2}{\epsilon_0}E^2$. Hier gaan we die (algemene) formule afleiden, waar bij we wel wat extra informatie zullen geven. Verder is dit een oefening in tensorrekening.

a. Bereken de contractie $F := F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ in termen van E_x, E_y, E_z, B_x, B_y en B_z;

De zogenaamde energy momentum tensor van het elektromagnetisch veld is:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}(F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F) \tag{1}$$

b. Bereken de component T_{00} in termen van E_x, E_y, E_z, B_x, B_y en B_z.

Dit is de genoemde klassieke uitdrukking voor de Energie.

4 Hints

4.1 Dopplereffect

Het licht is een elektromagnetisch golf en kan (gedeeltelijk) in een stelsel K als volgt worden beschreven:

$$\cos(\omega x - kt) \tag{2}$$

Formule (2) stelt bijvoorbeeld E_z voor, de component van het elektrische veld in de z-richting. Als ω en k positief zijn, dan loopt de golf in de positieve x-richting.

Nu hebben we een aantal eenvoudige verbanden tussen ω, k, c, λ (golflengte) en f (frequentie).

Al deze variabelen hebben we ook in accent vorm (ω', k', λ' en f') in een stelsel K'. In het bijzonder hebben we:

$$\cos(\omega' t' - k' x') \tag{3}$$

Vervang nu t' en x' in (3) door middel van de Lorentz transformatie en zie dus hoe het paar (ω, k) transformeert.

4.2 Associativiteit optellen snelheden

Schrijf de uitdrukking voor

$$(u \oplus v) \oplus w$$

volledig uit en herschrijf die zodanig dat de uitdrukking helemaal symmetrisch wordt in u, v en w.

Dit kan door de teller en de noemer die u krijgt beide met $1 + \frac{uv}{c^2}$ te vermenigvuldigen.

4.3 Gelijktijdige gebeurtissen

Bedenk dat de richtingcoëfficiënt van de gelijktijdigheidslijn $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ bekend is (namelijk $\frac{v}{c^2}$).