Uitwerkingen van de opgaven bij de extra opgaven bij het boek

Elektromagnetisme, Relativiteit

Auteur: Dr. H. (Harm) van der Lek
Versie 1

Inhoudsopgave

1 Vectorvelden en elektromagnetisme

Opmerking: we noteren $\frac{\partial}{\partial x}$ consequent als ∂_x in deze uitwerkingen.

1.1 Zwaartekracht binnen de aarde

Stel $\vec{g} := -C\vec{r} = -C(x, y, z)$ (dus b.v. $g_x = -Cx$) waarbij C een positieve constante.

a. Wat is de waarde van $|\vec{g}|$?

Uitwerking:

$$\begin{aligned} |\vec{g}| &:= \sqrt{(-Cx)^2 + (-Cy)^2 + (-Cz)^2} = \sqrt{C^2(x^2 + y^2 + z^2)} \\ &= C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C|\vec{r}| = Cr \end{aligned}$$

Of eigenlijk iets eenvoudiger:

$$|\vec{g}| = |-C\vec{r}| = C|\vec{r}| = Cr$$

b. Bereken $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ en trek daaruit conclusies over de zwaartekracht binnen de aarde.

Uitwerking: $\partial_x g_x = \partial_x(-Cx) = -C$ hetzelfde voor $\partial_y g_y$ en $\partial_z g_z$ dus: $\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \partial_x g_x + \partial_y g_y + \partial_z g_z = -C - C - C = -3C$ en is dus constant. Dit komt dus overeen met een constante massadichtheid ρ (met het verband $3C = 4\pi G\rho$) zoals bij benadering binnen de aardkorst verwacht mag worden.

We mogen dus $\vec{g}$ opvatten als het versnellingsveld van de zwaartekracht van de aarde *binnen* die aarde. En deze neemt, qua grootte, dus lineair af met de afstand tot het middelpunt van de aarde.

c. Bereken ook $\vec{\nabla} \times \vec{g}$.

Uitwerking: Eenvoudig is in te zien dat: $\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$, immers bijvoorbeeld $\partial_x g_y = 0$.

1.2 Divergentie en rotatie

Stel $\vec{b} := (y, -x, 0)$.

a. Bereken $\vec{\nabla} \cdot \vec{b}$.

Uitwerking: $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = \partial_x(y) + \partial_y(-x) + \partial_z(0) = 0 - 0 + 0 = 0$

b. Bereken ook $\vec{\nabla} \times \vec{b}$.

Uitwerking: $\vec{\nabla} \times \vec{b} = (0, 0, \partial_x a_y - \partial_y a_x) = (0, 0, \partial_x(-x) - \partial_y(y)) = (0, 0, -2)$

c. Kunt u zich hierbij iets (fysisch) bij voorstellen?

Uitwerking: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ en $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ zijn de twee Maxwellvergelijkingen voor een magnetisch veld. De tweede, de wet van Ampère, overigens zonder de Maxwell toevoeging. Dus de situatie zou kunnen zijn: géén veranderende elektrische veld en een magnetisch veld veroorzaakt door een stroom in de z-as naar de negatieve z-waarden.

1.3 Sferisch symmetrisch veld

Laten we aannemen dat we een sferisch symmetrisch veld hebben. Dan mogen we aannemen dat dit van de vorm $\vec{g} = f(r)\vec{r} = f(r)(x, y, z)$ is.

a. Los dit op voor de (buiten de oorsprong) lege ruimte, m.a.w. probeer de functie f te bepalen door $\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0$.

Uitwerking: We moeten berekenen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} := \partial_x g_x + \partial_y g_z + \partial_z g_z$$

We bekijken één variabele, bijvoorbeeld x. Dan is $g_x = f(r)x$ en dus:

$$\partial_x g_x = f' \partial_x r \; x + f = f' \frac{x^2}{r} + f$$

De tweede stap volgt uit $\partial_x r = \frac{x}{r}$. Hetzelfde kunnen we ook voor $\partial_y g_z$ en $\partial_z g_z$ doen en zo krijgen we:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = f' \frac{x^2}{r} + f + f' \frac{y^2}{r} + f + f' \frac{x^2}{r} + f = f' \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} + 3f = rf' + 3f$$

We moeten dus oplossen: $rf' + 3f = 0$, daarvoor zijn twee wegen:

Weg 1: Probeer $f(r) = r^n$, dan $f' = nr^{n-1}$, dus oplossen: $rnr^{n-1} + 3r^n = 0$, dus $nr^n + 3r^n = 0$, dus $n + 3 = 0$, dus $n = -3$, dus $f(r) = Cr^-3$.

Weg 2:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{3}{r} \Rightarrow \partial_r(\log f) = -3\partial_r(\log r)$$
$$\Rightarrow \log f = -3\log r + \text{ Constante } \Rightarrow f(r) = Cr^{-3}$$

Slotstuk: We hebben dus:

$$\vec{g} = C\frac{1}{r^3}\vec{r} = C\frac{1}{r^2}\vec{e}$$

Terug bij de 'inverse square' Wet.

1.4 Trein in tunnel paradox

De Lorentz-contractie heeft veel mensen (die het in eerste instantie nog niet goed begrepen) geïnspireerd tot het bedenken van paradoxen. Van de volgende zijn er veel variaties in omloop, bekend onder namen als 'pole in the barn' ('paal in de schuur'). Wij nemen hier de 'trein in tunnel' variant.

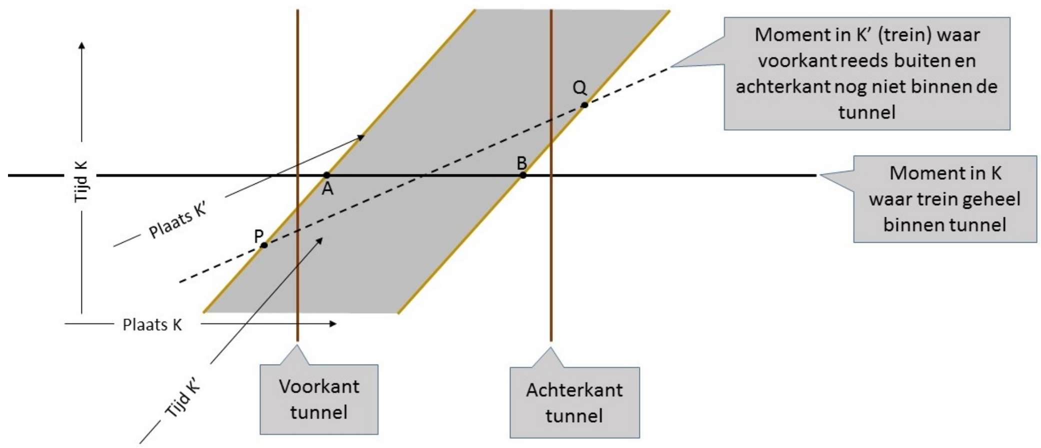
De redenering gaat als volgt. Stel een trein rijdt met grote snelheid door een tunnel. Bij meeting voorafgaande aan de proef bleek de trein een klein beetje langer dan de tunnel. Volgens de Lorentz contractie zien wij de trein echter wat ingekort en past hij dus wel helemaal in de tunnel. Maar alle stelsels zijn gelijkwaardig. Dus voor iemand in de trein komt de tunnel met grote snelheid langs en is dus wat korter. De trein past dus helemaal niet in de tunnel. Dit is een tegenspraak! Past de trein nu wel of niet in de tunnel?

a. Schets een tijdweg diagram van de situatie waaruit blijkt dat het helemaal geen paradox is.

In een tijdweg diagram geven we één van de ruimtedimensies aan en de tijdsdimensie. Een punt in zo'n diagram representeert dan een gebeurtenis ('puntgebeurtenis')

b. Geef in uw diagram de volgende punten (gebeurtenissen) aan: De achter- en voorkant (*A* resp. *B*) van de trein op een moment dat de trein, volgens de waarnemer naast de tunnel, geheel binnen de tunnel is. De achter- en voorkant (*P* resp. *Q*) op een moment, volgens de waarnemer in de trein, de achterkant nog niet in de tunnel is, maar de voorkant er wel al weer uit.

Uitwerking van a en b:



Figuur 1: Trein in tunnel

2 Lorentz transformatie en mechanica

2.1 Dopplereffect

Het Dopplereffect is bekend uit het gewone leven: als een politieauto naar je toe komt rijden, dan klinkt de sirene hoger dan hij wordt uitgezonden. En lager als de auto van je weg rijdt. Er is een klassieke verklaring voor. Stel de zender (Z) en de ontvanger bewegen ten opzichte van elkaar met een snelheid van v. Om de gedachten te bepalen: $v > 0$ als Z en O naar elkaar toe bewegen. Noem de frequentie van het signaal dat de zender uitzendt: f_Z. De frequentie zoals door de ontvanger wordt ervaren noemen we: f_O. De snelheid van de golfbeweging door het medium (lucht in geval van geluid; de ether in het geval van het klassieke licht) noemen we c. In de onderdelen a. t/m b. bekijken we de klassieke situatie.

a. Bepaal een formule voor f_O in termen van f_Z, v en c in het geval dat *de zender stilstaat* ten opzichte van het medium;

Met andere woorden: ergens staat een sirene op een gebouw en wij rijden ernaartoe. Voor een controle op uw antwoord: verifieer dat $f_O > f_Z$ in het geval dat $v > 0$.

Uitwerking: Centraal in de antwoorden is het vaste verband tussen frequentie f, golflengte λ en snelheid c: $f\lambda = c$.

$$f_O = \frac{c+v}{\lambda} = \frac{c+v}{c/f_Z} = \frac{c+v}{c} f_Z = (1+\frac{v}{c}) f_Z \tag{1}$$

en inderdaad is $f_O > f_Z$ in het geval dat $v > 0$.

Toelichting stap 1 van (1): wij rijden naar de golf toe, dus onze snelheid ten opzicht van de golf is $c + v$.

Toelichting stap 2 van (1): $f_Z\lambda = c$.

b. Bepaal een formule voor f_O in termen van f_Z, v en c in het geval dat *de ontvanger stilstaat* ten opzichte van het medium;

Met andere woorden: wij staan stil en de politieauto rijdt naar ons toe. Ook hier moet weer gelden dat $f_O > f_Z$ in het geval dat $v > 0$.

Uitwerking: Wij staan stil en de politieauto rijdt naar ons toe. In dat geval zal de golflengte wat afnemen. Immers als de politieauto een golffront heeft uitgezonden en dan daarna de volgende uitzendt (na $\frac{1}{f_Z}$ seconden) dan is de auto alweer wat verder naar ons toe gereden en wel over een afstand van $\frac{v}{f_Z}$. Voor de golflengte die wij ervaren geldt dus:

$$\lambda_O = \lambda_Z - \frac{v}{f_Z} = \frac{c}{f_Z} - \frac{v}{f_Z} = \frac{c-v}{f_Z} \tag{2}$$

en dus krijgen we:

$$f_O = \frac{c}{\lambda_O} = \frac{c}{c-v} f_Z \tag{3}$$

Ook hier klopt weer keurig dat $f_O > f_Z$ in het geval dat $v > 0$.

c. Laat zien dat de formules van a. en b. ongeveer hetzelfde zijn als $v \ll c$;

Uitwerking: Als $v \ll c$ dan ook $\frac{v}{c} \ll 1$. Dan kunnen we zeggen dat:

$$\frac{c}{c-v} = \frac{1}{1-v/c} \approx 1 + \frac{v}{c} = \frac{c+v}{c} \tag{4}$$

En inderdaad zijn dus formule 1 en formule 3 vrijwel gelijk als $v \ll c$.

Nu gaan we de situatie relativistisch bekijken. Het aardige is dat het Dopplereffect voor licht gewoon overeind blijft. Alleen blijkt er nu maar één formule voor beide gevallen te zijn. Dat is logisch want de lichtsnelheid is dan in alle stelsels hetzelfde en de stelsels van de Zender en Ontvanger zijn gelijkwaardig.

d. Bepaal een formule voor f_O in termen van f_Z, v en c in het relativistische geval en laat zien dat dit voor $v \ll c$ overeenkomt met de klassieke gevallen;

Uitwerking: We nemen aan dat de bron zich links bevindt en naar rechts beweegt. Het referentie stelsel van de bron komt dus overeen met het stelsel K' (de trein). Wij bevinden ons op het perron (het stelsel K). Het licht komt dus van links en passeert ons met een snelheid c. Het licht is een elektromagnetisch golf en kan (gedeeltelijk) als volgt worden beschreven:

$$\cos(\omega x - kt) \tag{5}$$

Formule 5 stelt bijvoorbeeld E_z voor, de component van het elektrische veld in de z-richting.

Nu hebben we een aantal verbanden tussen ω, k, c, λ (golflengte) en f (frequentie), namelijk:

$$\frac{\omega}{k} = c \tag{6}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{7}$$

Nu gaan formule 5 opstellen voor het K' stelsel en die via de Lorentztransformatie formules omwerken naar een soortgelijke uitdrukking in het K stelsel:

$$\begin{aligned}
\cos(\omega' t' - k' x') &= \cos[\omega'\gamma(t - \frac{v}{c^2}x) - k'\gamma(x - vt)] && (8)\\
&= \cos[\omega'\gamma t - \omega'\gamma\frac{v}{c^2}x - k'\gamma x + k'\gamma vt]\\
&= \cos[\omega'\gamma t + k'\gamma vt - \omega'\gamma\frac{v}{c^2}x - k'\gamma x]\\
&= \cos[(\omega'\gamma + k'\gamma v)t - (\omega'\gamma\frac{v}{c^2} + k'\gamma)x]\\
&= \cos[\gamma(\omega' + k'v)t - \gamma(\omega'\frac{v}{c^2} + k')x]\\
&= \cos[\gamma(\omega' + vk')t - \gamma(k' + \frac{v}{c^2}\omega')x] && (9)\\
&= \cos(\omega t - kx) && (10)
\end{aligned}$$

In formule 9 herkennen we de vorm van formule 10. Vandaar dat we de volgende conclusie kunnen trekken over de transformatie van het koppel (ω, k):

$$\omega = \gamma(\omega' + vk') \text{ en } k = \gamma(k' + \frac{v}{c^2}\omega') \tag{11}$$

By the way: de formules 11 lijken ons te willen vertellen dat het koppel (k, ω) transformeert volgens de (inverse!) Lorentztransformatie!

Voordat we uit 11 de verhouding tussen f_O en f_Z gaan afleiden, gaan we onze berekening eerst checken, door te kijken of het verband 6 nog wel steeds geldt, onder de aanname dat het geldt voor (ω', k'): $\frac{\omega'}{k'} = c$.

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\gamma(\omega' + vk')}{\gamma(k' + \frac{v}{c^2}\omega')} = \frac{\omega' + vk'}{k' + \frac{v}{c^2}\omega'} = \frac{\frac{\omega'}{k'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{\omega'}{k'}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2}c} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c(c + v)}{c + v} = c$$

Gelukkig, dat klopt. Nu de berekening waar het om draait. Bedenk daarbij dat de ontvanger zich in K bevindt (unprimed) en de zender in K' (primed).

$$f_O = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\gamma(\omega' + vk') = \frac{1}{2\pi}\gamma(\omega' + v\frac{\omega'}{c}) = \gamma(1 + \frac{v}{c})\frac{1}{2\pi}\omega' = \gamma(1 + \frac{v}{c})f_Z$$

Dus:

$$\begin{aligned} f_O = \gamma(1 + \frac{v}{c})f_Z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(1 + \frac{v}{c})f_Z &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}}(c + v)f_Z \\ &= \sqrt{\frac{(c + v)^2}{c^2 - v^2}}f_Z = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}f_Z \end{aligned}$$

Kortom:

$$f_O = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}f_Z \tag{12}$$

2.2 Constante kracht

Als we klassiek een voorwerp met massa m_0, dat op $t = 0$ de waarde $x = 0$ heeft (dus $x(0) = 0$) en dat nog geen snelheid heeft ($v(0) := \dot{x}(0) = 0$), onderwerpen aan een constante kracht F in de positieve x-richting, dan is de baan van dit voorwerp gekarakteriseerd door $x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m_0}t^2$. Voor de snelheid geldt dan: $v(t) := \dot{x}(t) = \frac{F}{m_0}t$. Op een zeker moment, namelijk als $t = \frac{m_0 c}{F}$, dan wordt $v(t) > c$. Dit mag relativistisch natuurlijk niet gebeuren.

a. Bepaal een formule voor $x(t)$ in het relativistische geval;

Ook hier nemen we aan dat $\vec{x}(0) = 0$ en $\vec{v}(0) = 0$. U mag hierbij aannemen dat de kracht in de positieve x-richting werkt $\vec{F} = (F_x, 0, 0)$ de gewone kracht is $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p})$ is met $\vec{p} = m\vec{v}$ en $m = \gamma m_0$. Neem dus aan dat $F_x = F =$ constant.

Uitwerking a: De x-component van de vergelijking $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p})$ is de enige die ertoe doet. Dus $F_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_x)$ gaan we verder bekijken. Gegeven is dat $F_x = F =$ een constante. We hebben $v = v_x$ en $F = F_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p)$. We moeten dus oplossen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = F = \text{ constant} \tag{13}$$

Hierin is $v = \dot{x}$ dus een functie van t die we willen vinden en daarna kunnen we x als functie van t zoeken. We behandelen zowel het klassieke als het relativistische geval. In beide gevallen leidt vergelijking (13) tot:

$$mv = Ft + \text{ een constante} \tag{14}$$

De constante in (14) zal 0 zijn, want v(0) = 0, dus hebben we:

$$mv = Ft \tag{15}$$

Klassieke geval: Dan is $m = m_0$ ook een constante. Dus wordt (15):

$$\dot{x} = v = \frac{F}{m_0}t \tag{16}$$

Dit kan geïntegreerd worden tot:

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m_0}t^2 \tag{17}$$

Hierbij is de integratieconstante ook weer 0 wegens de voorwaarde $x(0) = 0$. Dit is de bekende parabolische baan bij een constante versnelling en het resultaat was in de opgave reeds genoemd. Nu:

Relativistische geval: Dan is $m = \gamma m_0$ en hangt ook van v af. Dus wordt (15) nu:

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Ft \tag{18}$$

We gaan uit (18) v oplossen als functie van t in de hoop dat we die kunnen integreren:

$$\begin{aligned}
m_0 v &= \sqrt{1-v^2/c^2}\;Ft \quad ; \text{(met } \surd \text{ vermenigvuldigd)}\\
m_0^2 v^2 &= (1-v^2/c^2)\;F^2t^2 \quad ; \text{(gekwadrateerd)}\\
m_0^2 v^2 &= F^2t^2 - \frac{v^2}{c^2}F^2t^2 \quad ; \text{(haakjes weg)}\\
m_0^2 v^2 + \frac{v^2}{c^2}F^2t^2 &= F^2t^2 \quad ; \text{(}v\text{ naar links)}\\
(\sqrt{m_0^2 + \frac{F^2}{c^2}t^2})v &= Ft \quad ; \text{(wortel trekken)}\\
\dot{x} = v &= \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2 + \frac{F^2}{c^2}t^2}} \quad ; \text{(door } \surd \text{ gedeeld)} \qquad (19)
\end{aligned}$$

Om de functie $x(t)$ te bepalen moeten we dus het rechterlid van (19) 'primitiveren'. Dat wil zeggen we moet een functie zoeken waarvan dit rechterlid de afgeleide is. Dat is altijd tricky en vaak giswerk. In dit geval is het essentieel om te bedenken dat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2) = 2t$ of met andere notatie: $\mathrm{d}(t^2) = 2t\mathrm{d}t$. Dit betekent dat de substitutie $u = m_0^2 + \frac{F^2}{c^2}t^2$ wel eens heel succesvol zou kunnen zijn. Dan is $\mathrm{d}u = 2\frac{F^2}{c^2}t\mathrm{d}t$ en dus $t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{c^2}{F^2}\mathrm{d}u$. We kunnen nu de onbepaalde integraal (oftewel een primitieve) van het rechterlid van (19) als volgt bepalen:

$$\begin{aligned}
\int (m_0^2 + \frac{F^2}{c^2}t^2)^{-\frac{1}{2}} Ft\mathrm{d}t = \int u^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\frac{c^2}{F}\mathrm{d}u = \frac{c^2}{F}\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{c^2}{F}u^{\frac{1}{2}}\\
= \frac{c^2}{F}\sqrt{m_0^2 + \frac{F^2}{c^2}t^2} \qquad (20)
\end{aligned}$$

Dus we hebben voor $x(t)$:

$$x(t) = \frac{c^2}{F}\sqrt{m_0^2 + \frac{F^2}{c^2}t^2} + D \tag{21}$$

Hierbij is D in (21) de integratie constante. Deze is deze keer niet zomaar 0. Hij volgt uit de conditie dat $x(0) = 0$ en dan blijkt dat $D = -\frac{m_0 c^2}{F}$ dus de uiteindelijke oplossing is:

$$x(t) = \frac{c^2}{F}\sqrt{m_0^2 + \frac{F^2}{c^2}t^2} - \frac{m_0 c^2}{F} \tag{22}$$

Het was geen vraag, maar het is wel interessant (en ter controle) om te kijken wat er gebeurt als $t \to \infty$, met andere woorden als we het voorwerp maar blijven onderwerpen aan die constante kracht F. De factor $\frac{F^2}{c^2}t^2$ gaat dan domineren, zodat m_0^2 en $\frac{m_0 c^2}{F}$ hierbij in het niet gaan vallen. Dan krijgen we dus:

$$x(t) \approx \frac{c^2}{F}\sqrt{\frac{F^2}{c^2}t^2} = \frac{c^2}{F}\frac{F}{c}t = ct \text{ en ook } \dot{x} \approx c \tag{23}$$

We kunnen (23) interpreteren als volgt: uiteindelijk gaat de snelheid van het voorwerp de lichtsnelheid c benaderen, maar zal daar altijd toch nog net onder blijven. Dat ziet u ook door $t \to \infty$ te laten gaan direct in formule (19).

b. Laat zien dat dit voor $\frac{Ft}{m_0} \ll c$ overeenkomt met de klassieke formule;

Uitwerking b: De conditie $\frac{Ft}{m_0} \ll c$ betekent dat t nog relatief klein is en betekent ook dat in de factor onder het wortelteken van (22) m_0^2 domineert ten opzichte van $\frac{F^2}{c^2}t^2$. Daarom lijkt het zinvol om m_0^2 buiten het wortelteken te halen:

$$\sqrt{m_0^2 + \frac{F^2}{c^2}t^2} = m_0\sqrt{1 + \frac{F^2}{m_0^2 c^2}t^2} = m_0\sqrt{1+\epsilon} \tag{24}$$

In de laatste gelijkheid van (24) hebben we $\epsilon := \frac{F^2}{m_0^2 c^2}t^2$, wat dus een heel klein positief getalletje is. Nu kennen we in dat geval voor $\sqrt{1+\epsilon}$ een goede benaderingsformule namelijk:

$$\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon \tag{25}$$

Als we nu de exacte oplossing (22) combineren met (24) en (25) dan krijgen we:

$$x(t) = \frac{c^2}{F} m_0 \sqrt{1+\epsilon} - \frac{m_0 c^2}{F} \approx \frac{c^2}{F} m_0 (1 + \frac{1}{2}\epsilon) - \frac{m_0 c^2}{F} = \frac{1}{2}\frac{c^2}{F} m_0 \epsilon$$
$$= \frac{1}{2}\frac{c^2}{F} m_0 \frac{F^2}{m_0^2 c^2} t^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m_0} t^2$$

En dit komt inderdaad overeen met de klassieke formule (17).

2.3 Muonen

Muonen zijn elementere deeltjes met een extreem korte leeftijd: ongeveer 2,2 maal 10^{-6} seconde! Dit is in hun 'eigentijd'. Zij kunnen hier op aarde in versnellers gemaakt worden en daarbij is dit gemeten. Zij ontstaan echter ook in de bovenkant van de dampkring op ongeveer 10 kilometer hoogte, door botsing van zeer energierijke kosmische straling met de dampkring. Zij hebben dan een snelheid van ongeveer 0,995 maal de lichtsnelheid.

a. Laat zien dat, ondanks de enorme snelheid, volgens een klassieke (pre-relativistische) redenering de extreem korte levensduur ervoor zorgt dat zo'n muon de aarde toch (bijna) nooit zal bereiken;

Uitwerking a: De snelheid is 0,995 maal 300.000 = 298.500 km/sec. Dan legt het muon in 2,2 maal 10^{-6} seconde 656.700 maal 10^{-6} = 0,6567 kilometer af. Dat is dus beduidend minder dan 10 kilometer, dus het lijkt onmogelijk dat veel muonen het zullen halen.

Toch blijkt uit proeven en metingen dat zeer veel muonen het aardoppervlak bereiken.

b. Bereken, gedacht vanuit het referentie stelsel van de aarde, waarom dit toch wel kan.

Uitwerking b: We vermoeden dat dit komt omdat wij het (levens-)klokje van het muon heel erg vertraagd zien lopen. De vertragingsfactor is (bedenk dat $\frac{v}{c} = 0{,}995$):

$$\gamma = \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{1 - (0,995)^2} \approx 10,0125 \tag{26}$$

Het muon heeft, vanuit ons referentiekader gezien, dus tijd zat om de aarde te bereiken.

c. **Wat is, vanuit het referentie stelsel van het muon gezien, de reden dat het makkelijk de aarde kan bereiken?**

Uitwerking c: Het muon ziet, van uit zijn eigen referentiekader, door de Lorentz-contractie, een dampkring die maar liefst 10 ($=\gamma$, zie (26)) keer zo dun is, als wij hem zien. Een eitje om doorheen te komen met die snelheid.

2.4 Optellen snelheden associatief

Voor gewone optelling hebben we de associativiteitsregel:

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

Vandaar dat we gewoon $u+v+w$ kunnen schrijven, zonder kans op verwarring. Laten we de optelling van snelheden in de relativiteitstheorie noteren met $\oplus$, dus:

$$u \oplus v := \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \tag{27}$$

a. **Laat zien dat deze manier van optellen ook associatief is, met andere woorden dat geldt:**

$$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w) \tag{28}$$

Uitwerking: Als we de linkerkant van (28) uitschrijven met behulp van definitie (27) dan krijgen we:

$$\frac{\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} + w}{1 + \frac{\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}w}{c^2}}$$

als we hier noemer en teller vermenigvuldigen met $1+\frac{uv}{c^2}$ dan krijgen we:

$$\frac{u+v+w(1+\frac{uv}{c^2})}{1+\frac{uv}{c^2}+\frac{(u+v)w}{c^2}} = \frac{u+v+w+\frac{uvw}{c^2}}{1+\frac{uv+uw+vw}{c^2}}$$

De laatste uitdrukking is helemaal symmetrisch in u, v en w. Dus ook gelijk aan de rechterkant van (28).

2.5 Gelijktijdige gebeurtenissen

Stel om 12.00 uur ontploft er een bom ergens op aarde (gebeurtenis P). Precies een minuut later (dus om 12.01 uur) vindt er een eruptie plaats op de zon (gebeurtenis Q). Gebruik de volgende waarden:

$$\begin{array}{rcl} \text{lichtsnelheid} & : & c = 300.000 \text{ km/sec} \\ \text{afstand Aarde-Zon} & : & \Delta x = 150.000.000 \text{ km} \end{array}$$

a. Laat zien dat de invariant I negatief is.

Uitwerking: Te berekenen: $I = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ met $\Delta t = 60$ seconden en $\Delta x = 15.10^7$ km.

$$\begin{aligned} I &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \\ &= 3^2.10^{10}.6^2.10^2 - 15^2.10^{14} \\ &= 324.10^{12} - 225.10^{14} \\ &= (324 - 22500).10^{12} \\ &= -22176.10^{12} \end{aligned}$$

Het ruimtetijd interval tussen deze twee gebeurtenissen is dus *ruimtelijk*. Dat wil zeggen dat er een referentie systeem is waarin deze twee gebeurtenissen op exact hetzelfde moment plaatsvinden. Stel dit is een ruimteschip dat zich beweegt op de lijn tussen de Zon een de Aarde.

b. Bepaal de snelheid v van dit ruimteschip.

Uitwerking: We hebben gezien dat de richtingscoëfficiënt voor de gelijktijdigheidslijn gelijk is aan $\frac{v}{c^2}$. Dat betekent dus dat

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{v}{c^2} \quad \Rightarrow \quad v = c^2\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Nu de berekening:

$$v = c^2\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{3^2.10^10.60}{15.10^7} = \frac{18}{5}.10^4 = 36.000 \text{ km/sec}$$

Dit is ongeveer 1/8 maal de lichtsnelheid. Dit klopt met het feit dat het licht er ongeveer 8 minuten over doet om de afstand Zon-Aarde te overbruggen. De snelheid is in de richting van de zon, zoals uit het tijdwegdiagram volgt.

3 Tensor formulering Elektromagnetisme

3.1 Energie in een elektromagnetisch veld

We hebben de zes 6 functies (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y en B_z) van 4 variabelen: plaats (x, y, z) en tijd (t) zijnde het elektromagnetisch veld. In de theorie hierover kan men een formule afleiden voor de energie-inhoud van zo'n veld (niet zo makkelijk!). Voor een statisch elektrisch veld wordt dit $\frac{2}{\epsilon_0}E^2$. Hier gaan we die (algemene) formule afleiden, waar bij we wel wat extra informatie zullen geven. Verder is dit een oefening in tensorrekening.

a. Bereken de contractie $F := F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ in termen van E_x, E_y, E_z, B_x, B_y en B_z;

Uitwerking: Komt in de volgende versie.

De zogenaamde energy momentum tensor van het elektromagnetisch veld is:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}(F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F) \tag{29}$$

b. Bereken de component T_{00} in termen van E_x, E_y, E_z, B_x, B_y en B_z.

Dit is de genoemde klassieke uitdrukking voor de Energie.

Uitwerking: Komt in de volgende versie.